Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II (Unterrichtsfach)“

1. *Staatsexamensaufgabe Herbst 2003*

   Betrachten Sie die reelle 3×3–Matrix

   $$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   a) Berechnen Sie die Determinante von B.

   b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von B.

   c) Ermitteln Sie alle Eigenräume von B, indem Sie für jeden Eigenraum eine Basis angeben.

   d) Entscheiden Sie, ob B diagonalisierbar ist.

2. *Staatsexamensaufgabe Herbst 2004*

   Gegeben sei die reelle 3×3–Matrix

   $$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

   a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von M.

   b) Entscheiden Sie, ob M ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist.

   Bemerkung: Die Diagonalisierung von Matrizen ist ein zentrales Thema dieses Semesters und ist auch im Staatsexamen wichtig. Die Aufgaben 1. und 2. sind typische Aufgaben, die Sie ohne größere Probleme lösen sollten. Fragen Sie die Tutoren, falls es noch Unklarheiten gibt!

3. Für welche Werte $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

   $$A_a = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2a & 2 & a \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   diagonalisierbar?

   Hinweis:

   Wenden Sie Satz 8.16 an. Beachten Sie, dass die Diagonalisierung der Matrix A_a (sofern diese möglich ist) nicht explizit verlangt ist.

4.

a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine diagonalisierbare Matrix. Zeigen Sie, dass auch alle Potenzen A^p für $p \in \mathbb{N}$ diagonalisierbar sind.
Hinweis:
Falls $A \sim D$ gilt, wobei D eine Diagonalmatrix ist, so sollte ebenfalls $A^p \sim D^p$ gelten. Zeigen Sie die Äquivalenz $A^p \sim D^p$ unter Verwendung von Definition 8.14.

b) Finden Sie ein Beispiel für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so dass A^2 diagonalisierbar ist, aber A selber nicht diagonalisierbar ist.